УДК: 519.612.2

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ УРАВНЕНИЙ ПО ФОРМУЛАМ КРАМЕРА

Тимофеева А.А.[1], Килафян Ю.С.[1]

[1]Донской Государственный Технический Университет, Россия, Ростов-на-Дону, e-mail: anytat@inbox.ru

Рассматривается решение системы трех линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера и реализация данного метода в среде программирования PascalABC.net. Обосновывается выбор способа нахождения определителя матрицы. Анализируются различные методы его нахождения. Представляется блок-схема полученного алгоритма. Проверяется работоспособность полученной программы.
Ключевые слова: вычисление определителя, численные методы решения СЛАУ, метод Крамера, среда программирования PascalABC.net

SOLUTION OF THE SYSTEM OF THREE LINEAR EQUATIONS WITH CRAMER'S RULE

Timofeeva A.A.[1], Kilafyan Y.S.[1]

[1]Don State Technical University, Russia, Rostov-on-Don, e-mail: anytat@inbox.ru

The solution of the system of three linear equations with Cramer's rule and realization of this method in the integrated development environment PascalABC.net are considered. The base for choice of methods of finding equation determinant is shown. This article analyses different methods of finding it. The flowchart of prepared algorithm is shown. The workability of the program is checked.
Keywords: determinant of the matrix, numerical methods, Cramer's rule, IDE PascalABC.net

В современной алгебре существует множество разделов, требующих выполнения некоторых операций над матрицами. Матрицы выступают в роли формы записи параметров рассматриваемой задачи: систем линейных уравнений, значений операторов, тензоров невообразимых пространств. Практическая интерпретация данного представления может быть разной, но нечто объединяет такие параметры, физические и математические величины. Для этих величин удобно использовать матричное исчисление, со всеми ними выполняются различные операции, которые сводятся к операциям над матрицами.

В данной работе рассмотрено программирование и применение метода Крамера для нахождения решения системы трех линейных уравнений, представленной в виде матрицы. Данный метод позволяет найти корни системы уравнений с помощью вычисляемого для каждого из них определителя новой матрицы. Создание матриц и вычисление их определителей на практике – трудоемкий процесс, занимающий большое количество времени, и для его экономии используется программирование. Вычислительные машины справляются с задачей намного быстрее. Учитывая однотипность процессов, можно предположить, что этот метод достаточно просто запрограммировать, и далее у нас будет возможность убедиться в этом.

Ниже кратко представлена собранная теория по решению СЛАУ по формулам Крамера. Полученная информация была проанализирована, разобрана на части для составления подробного алгоритма будущей программы, реализующей данный метод. Все формулы приведены к виду, который будет удобно использовать в программировании. Также составлена программа для решения СЛАУ и представлен пример её использования.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} = b_2 \\ \cdots + \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} = b_n \end{cases}. \qquad (1)$$

СЛАУ можно записать в матричном виде: $AX = B$, тогда ее решение при условии существования матрицы, обратной A, примет вид:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{detA}\tilde{A}^T B. \qquad (2)$$

Тогда для каждого из корней можно записать:

$$x_i = \frac{1}{detA}\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ji} \cdot b_j = \frac{1}{detA} \cdot (\tilde{a}_{1i} \cdot b_1 + \tilde{a}_{2i} \cdot b_2 + \cdots + \tilde{a}_{ni} \cdot b_n). \qquad (3)$$

Второй множитель равносилен разложению по столбцу i, если бы он состоял из элементов матрицы B. Остается сделать вывод и сформулировать правило Крамера.

При условии, что матрица коэффициентов переменных системы линейных алгебраических уравнений A невырождена, система имеет единственное решение X с элементами, вычисляемыми по следующей формуле:

$$x_i = \frac{detA_i}{detA}, \qquad (4)$$

- где матрица A_i – матрица, образованная из матрицы A путем замены i −го столбца матрицей B.

Таким образом, основную часть решения СЛАУ методом Крамера составляет вычисление определителей.

Пусть задана система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными. Для её решения методом Крамера необходимо:
1. задать матрицы коэффициентов уравнений A и их правых частей B;
2. убедиться, что матрица коэффициентов A не вырождена, т.е. найти определитель матрицы и проверить условие его неравенства нулю;
3. создать три новые матрицы путем поочередной замены каждого из столбцов вектор-столбцом B и вычислить их определители, записать полученные результаты в вектор-столбец результатов X;
4. применить формулу (4) для каждого из элементов вектор-столбца X.

Для вычисления определителей мы будем использовать специальную подпрограмму. Каждый раз, обращаясь к ней, мы будем передавать новую матрицу и в результате работы получать определитель.

Перебирать строки и столбцы матриц для обращения к их элементам будем с помощью цикла for, т.к. нам заранее известно число шагов, которые мы совершим, а индексы принимают дискретные значения.

Блок-схема метода в общем виде представлена на рисунке 1.

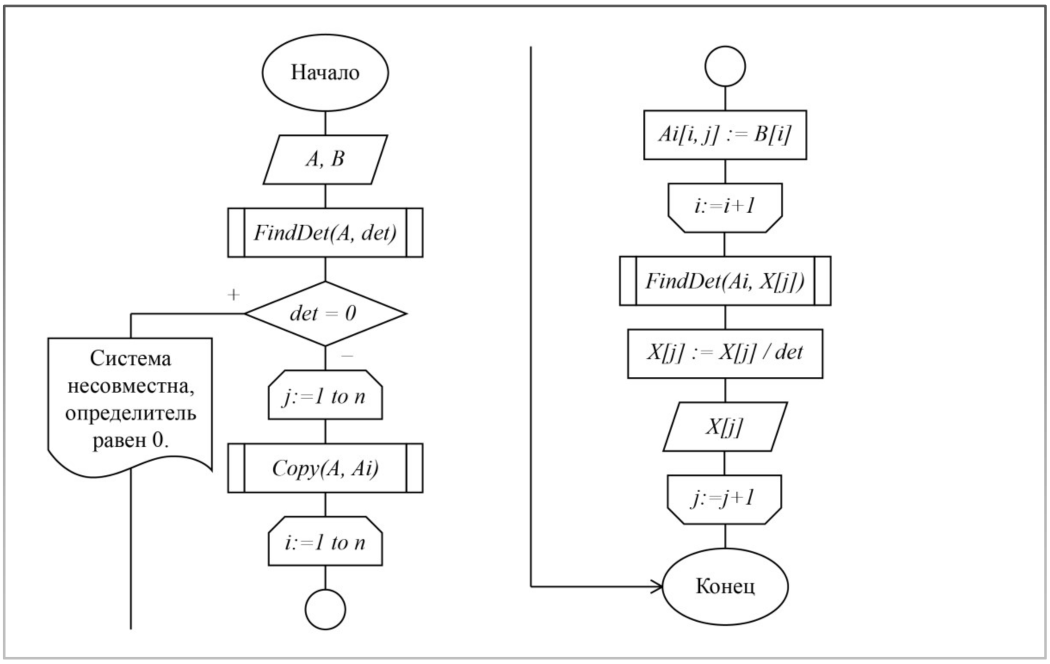

Рисунок 1 – Блок-схема метода Крамера для решения СЛАУ

Метод Крамера для поиска определителя не требует дополнительных данных. Нам понадобятся лишь матрицы коэффициентов уравнений системы и их правых частей. Учитывая, что нам необходимы лишь матрицы 3×3 и 3×1, будет оправданным создание типов-наследников статического массива. Они смогут быть использованы в подпрограммах, а также займут относительно небольшой объем памяти, сочетая в себе преимущества статических и динамических массивов.

Для вычисления определителя третьего порядка существует правило треугольников или звезды. Определитель матрицы согласно этому правилу:

$$\begin{gathered} detA = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \\ -a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}. \end{gathered} \tag{5}$$

Также определитель можно вычислить по алгоритму определителя n-ого порядка – разложением по строке, частным случаем которого и является правило звезды:

$$detA = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \cdot \tilde{a}_{ij} = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot M_{ij}, \tag{6}$$

где M_{ij} – определитель подматрицы A, созданной путем вычеркивания i –ой строки и j –ого столбца, который может быть вычислен по тому же правилу.

Если в первых столбцах матрицы и всех миноров, необходимых для нахождения определителя, все элементы, кроме первого, равны нулю, то формула (6) принимает вид:

$$detA = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}. \tag{7}$$

Можно искусственно привести матрицу к такому виду, т.к. с точки зрения программирования этот вариант имеет большое преимущество: отсутствует необходимость создания новых матриц путем вычеркивания строк и столбцов, использования множества вложенных циклов внутри программы.

Разница между правилом звезды и приведением к треугольному виду невелика, количество операций в первом случае – 18, а во втором – 19. Но при этом по сравнению с использованием правила звезды в виде формулы, вложенность циклов используемых во втором случае и постоянное изменение матриц не оправданы. Следовательно, для матриц 3-го порядка лучше использовать правило звезды, хотя, очевидно, алгоритм приведения матрицы к треугольному виду в общем случае нахождения определителя матрицы n –го порядка заметно выигрывает классический способ разложения по строке или столбцу.

Оформим в виде программы все полученные результаты (рис. 2).

```
•Kramer3.pas
program Kramer3;
label 1;
const n = 3;
type matrix = array[1..n,1..n] of real;
     vector = array[1..n] of real;
var i,j,i1,j1:integer;
    det:real;
    A,Ai:matrix;
    B,X:vector;

procedure FindDet1(A:matrix; var det:real);
begin
   det := A[1,1]*A[2,2]*A[3,3]+A[1,2]*A[2,3]*A[3,1]+A[2,1]*A[3,2]*A[
end;

procedure Copy(A:matrix; var Ai:matrix);
const n = 3;
var i,j:integer;
begin
   for i:= 1 to n do
      for j:= 1 to n do
         Ai[i,j]:= A[i,j];
end;

BEGIN
   writeln('Введите элементы матриц A и B:');
   for i:= 1 to n do begin
      for j:= 1 to n do begin
         write('a[',i,',',j,'] = ');
         readln(A[i,j]);
      end;
      write('b[',i,'] = ');
      readln(B[i]);
   end;

   FindDet1(A, det);
   if det = 0 then begin
      writeln('Система несовместна, определитель равен 0');
      goto 1;
   end;

   writeln; writeln('РЕЗУЛЬТАТ:'); writeln;

   for j:= 1 to n do begin
      Copy(A, Ai);
      for i:= 1 to n do
         Ai[i,j]:= B[i];
      FindDet1(Ai, X[j]);
      X[j]:= X[j]/det;
      writeln('x[',j,'] = ', X[j]);
   end;

1:
END.
```

Рисунок 2 – Реализация метода Крамера для решения системы трёх уравнений в среде программирования Pascal ABC.net

Решим систему трёх уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ x + y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 6 \end{cases}.$$

Представим систему в виде матрицы, а затем используем программу, реализующую метод Крамера. Получим данные, представленные на рисунке 3.

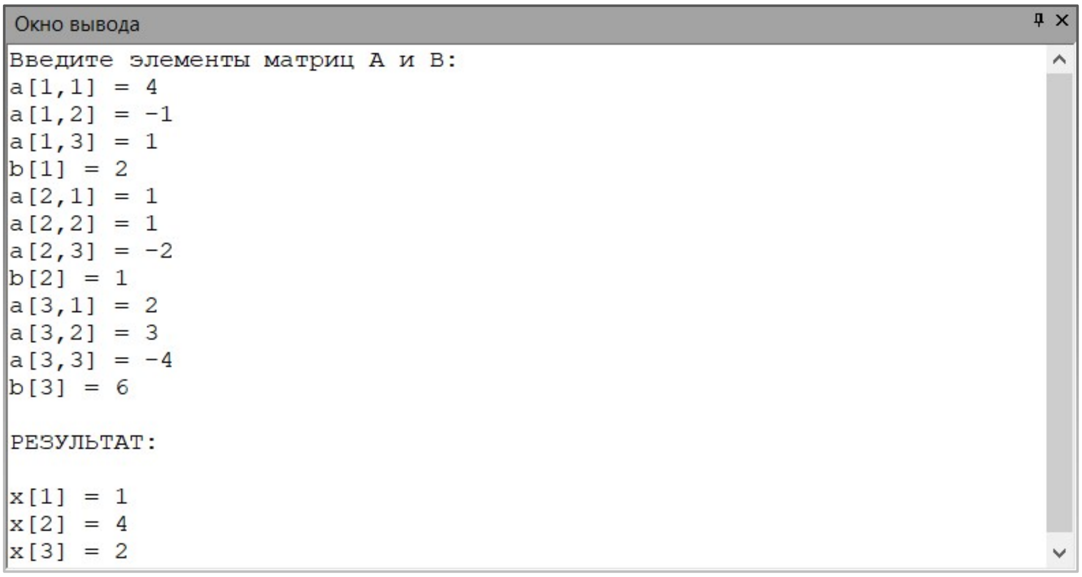
```
Окно вывода
Введите элементы матриц A и B:
a[1,1] = 4
a[1,2] = -1
a[1,3] = 1
b[1] = 2
a[2,1] = 1
a[2,2] = 1
a[2,3] = -2
b[2] = 1
a[3,1] = 2
a[3,2] = 3
a[3,3] = -4
b[3] = 6

РЕЗУЛЬТАТ:

x[1] = 1
x[2] = 4
x[3] = 2
```

Рисунок 3 – Результаты решения задачи о нахождении решения СЛАУ

Проверка путем подстановки полученных значений в исходные уравнения подтверждает правильность полученных результатов.

Таким образом, созданная программа работоспособна и готова к использованию. В результате работы также получена подпрограмма для вычисления определителя матрицы 3-го порядка, которая может быть использована отдельно.

Список литературы:

1. Ихрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений / Х.Д. Ихрамов. – М., Наука, 1984. – 192 с.
2. Михалкович, С.С. Учебная система программирования Pascal ABC / С.С. Михалкович // Научная конференция «Современные информационные технологии в образовании: Южный Федеральный округ». Материалы конференции. – Ростов-на-Дону, 2004. - С. 128–132.
3. Полуян, А.Ю. Методические указания для выполнения лабораторной работы «Решение систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса» по дисциплинам «Вычислительная математика», «Численные методы» / С.Б. Петренкова, А.Ю. Полуян. – Ростов-на-Дону: Донской гос. техн. ун-т, 2018. – 11 с.
4. Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра: Курс лекций / Е.Е. Тыртышников. – М.: ИВМ РАН, 2004-2005. – 372 с.
5. Щуп, Т. Прикладные численные методы в физике и технике / Т. Е. Щуп // Под ред. С. П. Меркурьева. - М.: Высш.шк., 1990.-255 с.